面代数とテンソル圏 (表現論と非可換調和解析)

林, 孝宏

数理解析研究所講究録
1082 巻 1999 年 34-47

面代数とテンソル圏

林 孝宏 (TAKAHIRO HAYASHI) 名古屋大学

1. 序

3 次元多様体の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量や 3 次元位相的場の量子論の背後にある代数的構造として, モジュラーテンソル圏というものが知られている. これは, 大雑把にみれば有限群の複素有限次元表現の全体の成す圏に類似したものであり, 表現のテンソル積に対応する演算を始め, 様々な構造を持っている. モジュラーテンソル圏の代表的な例はパラメーター q が 1 の冪根であるような量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現の圏の商 $\mathbf{C}(\mathfrak{g},q)$ として得られているが, この環は半単純ではないため, この構成法は必ずしも取扱いやすいとはいいがたい. ここでは, RSOS 模型と呼ばれる格子模型の L-作用素のなす代数 $\mathfrak{S}^*$ を用いて, $\mathbf{C}(\mathfrak{sl}_N,q)$ と同値であると期待される圏を構成する. この構成法は, 面代数とよばれる複雑な代数系の考察を必要とするという欠点があるものの, $\mathfrak{S}^*$ が有限次元の C^*-環の構造を持っていることが明らかであるなど, 表現論的には取扱いがやさしいという特徴をもっている. 特に Turaev により定式化された位相的場の量子論のユニタリ性の問題に対しては自然な解答を与えることができる.

ところで, モジュラーテンソル圏の構成法としては上記の 2 つのほかにも様々なものが知られており, どれによっても同値な圏が得られると期待されている. そこで, それら様々な圏に対し統一的な描像を与えることが望まれるわけであるが, このノートでは講演後の進展である「標準淡中双対性」というものについても説明し, テンソル圏の理論に於いて面代数がある意味で特別な位置にあるということを説明したい.

林 孝宏 (TAKAHIRO HAYASHI)　名古屋大学

2. 位相的場の量子論とモジュラーテンソル圏

3次元位相的場の量子論とは, 大雑把にいうと各曲面 Σ の上に $\mathbb{K}$-線形空間 $\mathcal{T}(\Sigma)$ を乗せる対応 $\mathcal{T}$ と, 2つの曲面 $\partial_+\Sigma, \partial_-\Sigma$ を境界に持つような向き付けられた3次元多様体 M に対し線形写像 $\tau(M): \mathcal{T}(\partial_-\Sigma) \to \mathcal{T}(\partial_+\Sigma)$ を与えるような対応 τ との組 $(\mathcal{T}, \tau)$ のことである. ただし, 空集合 $\emptyset$ も曲面と見做すことにし, 条件 $\mathcal{T}(\emptyset) = \mathbb{K}$ を要請することにする. したがって, 特に M が境界を持たない3次元多様体のときは $\tau(M)$ はスカラーになるが, これが M の Witten-Reshetikhin-Turaev 型不変量と呼ばれるものである. 位相的場の量子論 $(\mathcal{T}, \tau)$ は各線形空間が有限次元ヒルベルト空間であり, さらに3次元多様体 M とその向きを逆にした多様体 $-M$ との間に関係式 $\tau(M)^* = \tau(-M)$ が成り立つとき, ユニタリであると呼ばれる.

3次元位相的場の量子論の一般論は Turaev の教科書[14] で展開されているが, そこに於いて彼は, 3次元位相的場の量子論を構成するにはモジュラーテンソル圏という代数的なデータを与えれば十分であるということを示している. 以下, これについて簡単な説明をしよう. 圏 $\mathbf{C}$ と関手 $\otimes: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ の組 $(\mathbf{C}, \otimes)$ が <u>モノイダル圏</u> であるとは対象 $\mathbf{1}$ と自然な同型

$$(2.1)\qquad a_{LMN}: (L \otimes M) \otimes N \cong L \otimes (M \otimes N),$$

$$(2.2)\quad l_M: \mathbf{1} \otimes M \cong M, \quad r_M: M \otimes \mathbf{1} \cong M \quad (L, M, N \in \mathrm{object}(\mathbf{C}))$$

が存在してしかるべき性質をみたすことをいう. モノイダル圏 $(\mathbf{C}, \otimes)$ の対象 M に対し, 対象 $M^\vee$ が M の <u>左双対</u> であるとは射

$$(2.3)\qquad b_M: \mathbf{1} \to M \otimes M^\vee, \quad d_M: M^\vee \otimes M \to \mathbf{1}$$

が存在して

$$(2.4)\quad M \xrightarrow{l^{-1}} \mathbf{1} \otimes M \xrightarrow{b \otimes \mathrm{id}} (M \otimes M^\vee) \otimes M \xrightarrow{a} M \otimes (M^\vee \otimes M) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes d} M \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r} M,$$

$$(2.5)\quad M^\vee \xrightarrow{r^{-1}} M^\vee \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes b} M^\vee \otimes (M \otimes M^\vee) \xrightarrow{a^{-1}} (M^\vee \otimes M) \otimes M^\vee \xrightarrow{d \otimes \mathrm{id}} \mathbf{1} \otimes M^\vee \xrightarrow{l} M^\vee$$

がともに恒等射に一致することをいう. 各対象が左双対を持つとき $(\mathbf{C}, \otimes)$ は左リジッドであるという. さらに適当な性質を満たす自然な同型

(2.6)
$$c_{MN} : M \otimes N \cong N \otimes M, \quad q_M : M \cong (M^\vee)^\vee \quad (M, N \in \mathrm{object}(\mathbf{C}))$$

が存在するとき $(\mathbf{C}, \otimes)$ は リボン圏 であるという. ただし, 条件 $c_{MN} \circ c_{NM} = \mathrm{id}$ は要求しないものとする. リボン圏の射 $f : M \to M$ に対し

$$(2.7)\quad \mathbf{1} \xrightarrow{b} M \otimes M^\vee \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M \otimes M^\vee \xrightarrow{q \otimes \mathrm{id}} (M^\vee)^\vee \otimes M^\vee \xrightarrow{d} \mathbf{1}$$

を f の q-トレース と呼び $\mathrm{Tr}_q(f)$ で表す. また, $\mathrm{id_M}$ の q-トレースを M の q-次元 と呼ぶ. リボン圏が一つ与えられれば, その各対象 M に対して, 自然にリンクの不変量が定義されることが知られている.

次にモノイダル圏 $(\mathbf{C}, \otimes)$ は体 $\mathbb{K}$ 上のアーベル圏の構造も持っており, 各構造射は線形であるとする. このようなものをここでは テンソル圏 と言うことにする. さらに, シューアの補題

$$(2.8)\qquad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L_\lambda, L_\mu) \cong \mathbb{K}\delta_{\lambda,\mu}\mathrm{id}_{L_\lambda}$$

を満たす (有限個の) 対象 $\{L_\lambda | \lambda \in \mathcal{V}\}$ が存在して, $\mathbf{C}$ の各対象はこれらの直和に同型であるとき $\mathbf{C}$ は (有限) 分裂半単純 であると言う. 有限分裂半単純なリボン圏 $\mathbf{C}$ が条件 $\mathbf{1} \cong L_\emptyset$ $(\exists \emptyset \in \mathcal{V})$ を満たし, さらに S-行列

$$(2.9)\qquad [\mathrm{Tr}_q\left(c_{L_\lambda L_\mu} \circ c_{L_\mu L_\lambda}\right)]_{\lambda,\mu \in \mathcal{V}}$$

が可逆であるとき $\mathbf{C}$ は モジュラーテンソル圏 であるという. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上のモジュラーテンソル圏 $\mathbf{C}$ が演算 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, L)$; $f \mapsto \overline{f}$ を持ち,

$$(2.10)\quad \overline{\overline{f}} = f, \quad \overline{f \otimes g} = \overline{f} \otimes \overline{g}, \quad \overline{f \circ g} = \overline{g} \circ \overline{g}, \quad \overline{c_{LM}} = (c_{LM})^{-1},$$

$$(2.11)\qquad \mathrm{Tr}_q(f\overline{f}) > 0 \quad (f \neq 0)$$

などの関係式を満たすとき $\mathbf{C}$ は ユニタリ であるという. Turaev により展開された一般論により, (ユニタリな) モジュラーテンソル圏から (ユニタリな) 3 次元位相的場の量子論が構成されることが知られている. また, 3 次元位相的場の量子論がユニタリであることが分かれば, 対応する不変

量に対し, 不等式評価や別の表示式が得られるなどのご利益があることが知られている.

注 **2.1.** $(\mathbf{C}, \otimes)$ を有限群 $G \neq 1$ の有限次元ユニタリ表現の全体とすると, その S-行列は既約表現の次元を用いて $[\dim(L_\lambda)\dim(L_\mu)]_{\lambda\mu}$ と表され, 従って可逆ではない. しかしながら, この例は, これ以外の上記の諸条件をすべて満たしている. 我々が扱う例でも, S-行列の計算がもっとも厄介な部分である.

3. 面代数

通常の量子群の関数環と同様に, 我々の用いる代数も格子模型のボルツマンウェイトと呼ばれる量に FRT 構成法というものを適用することにより得られる. ただし, 通常の場合とは異なり面型格子模型というものを用いるため, この代数は双代数にはならず, 面代数というより複雑な代数系で記述されることになる. 以下に面代数とその上の諸構造の定義を述べよう.

$\mathfrak{H}$ は 体 $\mathbb{K}$ 上の代数でありかつ余代数であるようなものとし, e_i, $\mathring{e}_i$ を有限集合 $\mathcal{V}$ の元 i に添字付けられた $\mathfrak{H}$ の元であるとする. このとき, $(\mathfrak{H}, \{e_i\}, \{\mathring{e}_i\})$ が $\mathcal{V}$-面代数 であるとは次が成り立つことであるとする:

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \tag{3.1}$$

$$e_ie_j = \delta_{ij}e_i, \quad \mathring{e}_i\mathring{e}_j = \delta_{ij}\mathring{e}_i, \quad e_i\mathring{e}_j = \mathring{e}_je_i, \tag{3.2}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{V}} e_k = 1 = \sum_{k\in\mathcal{V}} \mathring{e}_k, \tag{3.3}$$

$$\Delta(\mathring{e}_ie_j) = \sum_{k\in\mathcal{V}} \mathring{e}_ie_k \otimes \mathring{e}_ke_j, \quad \varepsilon(\mathring{e}_ie_j) = \delta_{ij}, \tag{3.4}$$

$$\varepsilon(ab) = \sum_{k\in\mathcal{V}} \varepsilon(ae_k)\varepsilon(\mathring{e}_kb). \tag{3.5}$$

ただし, Δ, ε はそれぞれの $\mathfrak{H}$ の余積, 余単位元であるとする．この定義で, 特に $\mathcal{V}$ がただ1つの元 i のみからなっているとすると, (3.3) より $e_i = \mathring{e}_i = 1$ であり, また(3.4), (3.5) はそれぞれ

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \varepsilon(1) = 1, \tag{3.6}$$

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) \tag{3.7}$$

となる．よってこの場合は $\mathcal{V}$-面代数とは双代数のことにほかならず, 面代数は双代数を含む概念であることがわかる．

面代数の例はグラフを用いて簡単に構成することができる．$\mathcal{G}$ を有限有向グラフとし, $\mathcal{V} = \mathcal{G}^0$ をその頂点の全体とする．$\mathcal{G}$ の辺 $\mathbf{p}$ に対しその始点と終点をそれぞれ $\mathfrak{s}(\mathbf{p})$ と $\mathfrak{t}(\mathbf{p})$ で表す．また, $k \geq 1$ に対し, $\mathcal{G}^k = \coprod_{i,j\in\mathcal{V}} \mathcal{G}^k_{ij}$ を $\mathcal{G}$ の長さ k の パス の全体とする．即ち, $\mathcal{G}^k_{ij}$ は $\mathcal{G}$ の辺の列 $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k)$ であって, $\mathfrak{s}(\mathbf{p}) := \mathfrak{s}(\mathbf{p}_1) = i$, $\mathfrak{t}(\mathbf{p}_n) = \mathfrak{s}(\mathbf{p}_{n+1})$ $(1 \leq n < k)$, $\mathfrak{t}(\mathbf{p}) := \mathfrak{t}(\mathbf{p}_k) = j$ をみたすようなもののの全体であるとする．このとき記号 $e\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ $(\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{G}^k, k \geq 0)$ により張られる線形空間 $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ は次の演算により $\mathcal{V}$-面代数になる:

$$\mathring{e}_i = \sum_{j\in\mathcal{V}} e\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \quad e_j = \sum_{i\in\mathcal{V}} e\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} e\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \delta_{\mathfrak{t}(\mathbf{p})\mathfrak{s}(\mathbf{r})}\, \delta_{\mathfrak{t}(\mathbf{q})\mathfrak{s}(\mathbf{s})}\, e\begin{pmatrix} \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} \\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{s} \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

$$\Delta\left(e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}\right) = \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{G}^k} e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} \otimes e\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{G}^k), \tag{3.10}$$

$$\varepsilon\left(e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}\right) = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}. \tag{3.11}$$

ここで, パス $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_j)$ と $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k)$ が $\mathfrak{t}(\mathbf{p}) = \mathfrak{s}(\mathbf{r})$ を満たす時, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$ はこれらをつないでできるパス $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_j, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k)$ である．

命題 3.1 ([5]). 有限生成の面代数はある $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ の商と同型である.

$\mathfrak{H}$ を $\mathcal{V}$-面代数とする. 線形写像 $S\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ が条件

(3.12)
$$\sum_{(a)} S(a_{(1)})a_{(2)} = \sum_{k\in\mathcal{V}} \varepsilon(ae_k)e_k, \quad \sum_{(a)} a_{(1)}S(a_{(2)}) = \sum_{k\in\mathcal{V}} \varepsilon(e_k a)\mathring{e}_k,$$

(3.13)
$$\sum_{(a)} S(a_{(1)})a_{(2)}S(a_{(3)}) = S(a) \quad (a \in \mathfrak{H})$$

をみたすとき, S は $\mathfrak{H}$ の 対合射 である, または $\mathfrak{H}$ は ホップ面代数 であるという. ただし, $a \in \mathfrak{H}$ に対し,

(3.14)
$$\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)},$$

(3.15)
$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{H}}) \circ \Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} = (\mathrm{id}_{\mathfrak{H}} \otimes \Delta) \circ \Delta(a)$$

という略記法を用いた. ホップ代数の場合と同様に面代数の対合射は反代数射でありかつ反余代数射である. 次に $\mathcal{R}^+, \mathcal{R}^-$ を $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ の元とするとき, $(\mathfrak{H}, \mathcal{R}^\pm)$ が 準三角 であるとは

(3.16)
$$\mathcal{R}^+\Delta(1) = \mathcal{R}^+, \quad \Delta(1)\mathcal{R}^- = \mathcal{R}^-,$$

(3.17)
$$\mathcal{R}^-\mathcal{R}^+ = \Delta(1), \quad \mathcal{R}^+\mathcal{R}^- = (\Delta^{\mathrm{cop}})(1),$$

(3.18)
$$\mathcal{R}^+\Delta(a)\mathcal{R}^- = (\Delta^{\mathrm{cop}})(a) \quad (a \in \mathfrak{H}),$$

(3.19)
$$(\Delta\otimes\mathrm{id})(\mathcal{R}^+) = \mathcal{R}^+_{13}\mathcal{R}^+_{23}, \quad (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\mathcal{R}^+) = \mathcal{R}^+_{13}\mathcal{R}^+_{12}$$

が成り立つことを言う．ただし，$\Delta^{\mathrm{cop}}(a) = \sum_{(a)} a_{(2)} \otimes a_{(1)}$ とし，また $\mathcal{R}^{\pm} = \sum_{\nu} \mathcal{R}^{\pm}_{\nu} \otimes \dot{\mathcal{R}}^{\pm}_{\nu}$ とするとき $\mathcal{R}^{\pm}_{13} = \sum_{\nu} \mathcal{R}^{\pm}_{\nu} \otimes 1 \otimes \dot{\mathcal{R}}^{\pm}_{\nu}$ などとする．準三角ホップ代数のときと同様に $\mathcal{R}^{\pm}$ はヤングバクスター方程式をみたす:

$$\mathcal{R}^{\pm}_{12}\mathcal{R}^{\pm}_{13}\mathcal{R}^{\pm}_{23} = \mathcal{R}^{\pm}_{23}\mathcal{R}^{\pm}_{13}\mathcal{R}^{\pm}_{12}. \tag{3.20}$$

$(\mathfrak{H}, \mathcal{R}^{\pm})$ を準三角ホップ面代数，$\mathcal{V}$ を $\mathfrak{H}$ の中心に属する可逆元とする．このとき $(\mathfrak{H}, \mathcal{V})$ が<u>リボンホップ面代数</u>であるとは次が成り立つことをいう:

$$\mathcal{V}^2 = \mathcal{U}S(\mathcal{U}), \tag{3.21}$$

$$\Delta(\mathcal{V}) = \mathcal{R}^{-}\mathcal{R}^{-}_{21}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}), \tag{3.22}$$

$$\varepsilon(\mathcal{V}\mathring{e}_i e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j \in \mathcal{V}). \tag{3.23}$$

ただし，$\mathcal{U} = \sum_{\nu} S(\dot{\mathcal{R}}^{+}_{\nu})\mathcal{R}^{+}_{\nu}$ とする．

<u>注</u> **3.2.** 実は上記の定義は $\mathfrak{H}$ が有限次元でないときは適切ではない．無限次元のときは位相付きで考えるか，「余リボンホップ面代数」というものを考えるか，いずれかにしなければならない．我々は実際には後者を用いているのであるが，加群の代わりに余加群を考える煩わしさを避けるために，ここではこれには触れないことにする．

以上複雑な定義が続いたが，これらはいずれも前節で述べた圏論の用語と対応付けることができる．次にこれについて説明しよう．一般に群 G の表現が2つあればそれらの表現空間 M, N のテンソル積 $M \otimes N$ は $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$ $(g \in G, m \in M, n \in N)$ によりまた G の表現空間になる．同様に双代数 H の左加群 M, N に対しても $M \otimes N$ は

$$a(m \otimes n) = \sum_{(a)} a_{(1)}m \otimes a_{(2)}n \quad (a \in H, m \in M, n \in N) \tag{3.24}$$

により，H-加群になる．面代数の場合は，(card$(\mathcal{V}) = 1$ である場合を除き，) $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ が成り立たないため一般に $M \otimes N$ は $\mathfrak{H}$-加群にならないが，その部分空間 $M\bar{\otimes}N$ を

$$M\bar{\otimes}N = \bigoplus_{k \in \mathcal{V}} M(i, k) \otimes N(k, j) \tag{3.25}$$

で定めてやれば, これは(3.24) の制限により $\mathfrak{H}$-加群になる. ただし, $\mathfrak{H}$-加群 M に対し, その 面空間分解 を

$$M = \bigoplus_{i,j\in\mathcal{V}} M(i,j), \quad M(i,j) = \mathring{e}_i e_j M \tag{3.26}$$

で定めるものとする. 容易に分かるように, この演算は結合律 $(L\bar{\otimes}M)\bar{\otimes}N \cong L\bar{\otimes}(M\bar{\otimes}N)$ をみたし, (有限次元) $\mathfrak{H}$- 加群の全体はテンソル圏になる. さらに $\mathfrak{H}$ が有限次元リボンホップ面代数で M, N が有限次元のときは 左双対加群 $M^\vee$ および同型 $c_{MN} : M\bar{\otimes}N \cong N\bar{\otimes}M$, $q_M : M \cong (M^\vee)^\vee$ が

$$M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M,\mathbb{K}), \tag{3.27}$$

$$\langle am^\vee, m\rangle = \langle m^\vee, S(a)m\rangle \quad (a\in\mathfrak{H}, m^\vee\in M^\vee, m\in M), \tag{3.28}$$

(3.29)
$$c_{MN}(m\otimes n) = \mathrm{tw}(\mathcal{R}^+(m\otimes n)) \quad (m\in M(i,k), n\in N(k,j)),$$

$$q_M(m) = \mathcal{U}\mathcal{V}^{-1}m \quad (m\in M) \tag{3.30}$$

で定義される. ただし, $\mathrm{tw}(m\otimes n) = n\otimes m$ $(m\in M, n\in N)$ とする.

命題 **3.3.** 有限次元リボンホップ面代数 $\mathfrak{H}$ に対し, その有限次元左加群の全体 $\mathbf{mod}_{\mathfrak{H}}$ は上記の諸構造により, リボン圏になる.

次の事実は以下の記述の都合上必要である.

命題 **3.4.** 有限次元(ホップ) $\mathcal{V}$-面代数 $\mathfrak{H}$ に対し, その双対空間 $\mathfrak{H}^*$ は以下の演算により(ホップ) $\mathcal{V}$-面代数になる:

(3.31)
$$\langle XY, a\rangle = \sum_{(a)}\langle X, a_{(1)}\rangle\langle Y, a_{(2)}\rangle, \quad \langle X, ab\rangle = \sum_{(X)}\langle X_{(1)}, a\rangle\langle X_{(2)}, b\rangle,$$

$$\langle \mathring{e}_i e_j, a\rangle = \varepsilon(e_i a e_j), \quad \langle S(X), a\rangle = \langle X, S(a)\rangle \tag{3.32}$$

$$(X, Y\in\mathfrak{H}^*, a, b\in\mathfrak{H}, i, j\in\mathcal{V}).$$

4. RSOS 模型に付随する面代数

我々が用いる面代数 $\mathfrak{S}$ の定義を述べる. $N \geq 2$ と $L \geq 2$ を整数とする. 各 $1 \leq i \leq N$ に対し, ベクトル $\hat{i} \in \mathbb{R}^N$ を $\hat{1} = (1-1/N, -1/N, \dots, -1/N)$, $\dots, \hat{N} = (-1/N, \dots, -1/N, 1-1/N)$ で定め, $\mathbb{R}^N$ の部分集合 $\mathcal{V}$ を

(4.1)
$$\mathcal{V} = \{\lambda_1 \hat{1} + \cdots \lambda_N \hat{N} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbf{Z}, L \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N = 0\}$$

で定める. また, 各 $m \geq 0$ に対し, $\mathcal{V}^{m+1}$ の部分集合 $\mathcal{G}^m$ を

$$\mathcal{G}^m = \mathcal{V}^{m+1} \cap \{(\lambda \mid i_1, \dots, i_m) \mid \lambda \in \mathcal{V}, 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq N\}, \tag{4.2}$$

$$(\lambda \mid i_1, \dots, i_m) := (\lambda, \lambda + \hat{i}_1, \dots, \lambda + \hat{i}_1 + \cdots + \hat{i}_m) \tag{4.3}$$

で定める. $\mathcal{G}^m$ は $\mathcal{V}$ を頂点の全体, $\mathcal{G}^1$ を辺の全体とする有向グラフ $\mathcal{G}$ の長さ m のパスの全体と同一視できる. つぎに, $\mathbf{p} = (\lambda \mid i, j) \in \mathcal{G}^2$ に対し

$$\mathbf{p}^\dagger = (\lambda \mid j, i), \quad d(\mathbf{p}) = \lambda_i - \lambda_j + j - i \tag{4.4}$$

とおき, 集合 $\mathcal{G}^2$ を 3 つの部分集合

$$\mathcal{G}^2[\rightarrow] = \{\mathbf{p} \in \mathcal{G}^2 \mid \mathbf{p}^\dagger = \mathbf{p}\}, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{G}^2[\downarrow] = \{\mathbf{p} \in \mathcal{G}^2 \mid \mathbf{p}^\dagger \notin \mathcal{G}^2\}, \tag{4.6}$$

$$\mathcal{G}^2[\searrow] = \{\mathbf{p} \in \mathcal{G}^2 \mid \mathbf{p} \neq \mathbf{p}^\dagger \in \mathcal{G}^2\} \tag{4.7}$$

の和 $\mathcal{G}^2[\rightarrow] \coprod \mathcal{G}^2[\downarrow] \coprod \mathcal{G}^2[\searrow]$ に分割しておく. このとき, A_{N-1}-型 <u>RSOS 格子模型</u> <u>のボルツマンウェイト</u>と呼ばれる量 $w = w_{N,t} : \mathcal{V}^4 \to \mathbb{C}$ を各 <u>$\mathbf{p} = (\lambda \mid i, j) \in \mathcal{G}^2[\searrow] \amalg \mathcal{G}^2[\downarrow]$</u> と $(\lambda \mid k, k) \in \mathcal{G}^2[\rightarrow]$ に対し

$$w_{N,t}\begin{bmatrix} \lambda & \lambda + \hat{i} \\ \lambda + \hat{i} & \lambda + \hat{i} + \hat{j} \end{bmatrix} = -\zeta^{-1} t^{-d(\mathbf{p})} \frac{1}{[d(\mathbf{p})]}, \tag{4.8}$$

$$w_{N,t}\begin{bmatrix} \lambda & \lambda + \hat{i} \\ \lambda + \hat{j} & \lambda + \hat{i} + \hat{j} \end{bmatrix} = \zeta^{-1} \frac{[d(\mathbf{p}) - 1]}{[d(\mathbf{p})]}, \tag{4.9}$$

$$w_{N,t}\begin{bmatrix} \lambda & \lambda + \hat{k} \\ \lambda + \hat{k} & \lambda + 2\hat{k} \end{bmatrix} = \zeta^{-1} t, \tag{4.10}$$

$$w_{N,t}[\text{その他}] = 0 \tag{4.11}$$

とおくことにより定める. ただし, $t = \exp(\pm\pi i/(N+L))$, $[n] = (t^n - t^{-n})/(t - t^{-1})$ $(n \in \mathbf{Z})$ とし, ζ は $\zeta^N = t$ を満たす 1 の原始 $2N(N+L)$ 乗根とする.

以上の準備のもとで, 複素数体上の面代数 $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{N,t}$ を, 前節で定めた面代数 $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ を次の関係式で割ったものとして定義する:

$$\sum_{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}\in\mathcal{G}^2} w\begin{bmatrix} & \mathbf{p} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{q} & \end{bmatrix} e\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{s}\end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\in\mathcal{G}^2} w\begin{bmatrix} & \mathbf{c} & \\ \mathbf{a} & & \mathbf{d} \\ & \mathbf{b} & \end{bmatrix} e\begin{pmatrix}\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

$$\det = 1. \tag{4.13}$$

ただし, $\det = \sum_{\lambda,\mu\in\mathcal{V}} \det\binom{\lambda}{\mu}$ は以下で定まる元であるとする:

$$\det\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \frac{D(\mu)}{D(\lambda)} \sum_{\mathbf{p}\in\mathcal{G}^N_{\lambda\lambda}} (-1)^{\mathcal{L}(\mathbf{p})+\mathcal{L}(\mathbf{q})} e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

$$D(\lambda) = \prod_{1\le i<j\le N} \frac{[d(\lambda\,|\,i,j)]}{[d(0\,|\,i,j)]} \quad (\lambda\in\mathcal{V}), \tag{4.15}$$

$$\mathcal{L}(\lambda\,|\,i_1,\ldots,i_m) = \operatorname{card}\{(k,l)\,|\,1\le k<l\le N,\ i_k<i_l\}. \tag{4.16}$$

ただし, $\mathbf{q}$ は $\mathcal{G}^N_{\mu\mu}$ の任意の元とする (関係式 (4.12) のもとでは (4.14) は $\mathbf{q}$ の取り方によらない). 面代数 $\mathfrak{G}$ は有限次元であり, その双対面代数 $\mathfrak{G}^*$ は以下で定まる諸演算により, リボンホップ面代数になる:

(4.17)

$$S\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\right) = (-1)^{i+j}\frac{D(\mathfrak{r}(\mathbf{p}))}{D(\mathfrak{r}(\mathbf{q}))} \sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{G}^{N-1}_{\mathfrak{r}(\mathbf{q})\mathfrak{s}(\mathbf{q})}} (-1)^{\mathcal{L}(\mathbf{a})+\mathcal{L}(\mathbf{b})} e\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} \quad (\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^1),$$

$$\left\langle \mathcal{R}^+,\, e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\otimes e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right\rangle = w\begin{bmatrix} & \mathbf{q} & \\ \mathbf{r} & & \mathbf{s} \\ & \mathbf{p} & \end{bmatrix} \quad (\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^1), \tag{4.18}$$

$$\left\langle \mathcal{U}\mathcal{V}^{-1},\, e\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \right\rangle = \delta_{\mathbf{pq}} \frac{D(\mathfrak{r}(\mathbf{p}))}{D(\mathfrak{s}(\mathbf{q}))} \quad (\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathcal{G}^r). \tag{4.19}$$

ただし, (4.17) で $\mathbf{b}$ は $\mathcal{G}^{N-1}_{\mathfrak{r}(\mathbf{p})\mathfrak{s}(\mathbf{p})}$ の任意の元を表すものとする. 更に, $\mathfrak{G}^*$ は

$$\left\langle X^*,\, e\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \right\rangle = \frac{K(\mathbf{p})}{K(\mathbf{q})} \overline{\left\langle X,\, e\binom{\mathbf{q}}{\mathbf{p}} \right\rangle} \quad (X \in \mathfrak{G}^*, \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathcal{G}^r) \tag{4.20}$$

により, C^*-環になる. ただし, $K(\mathbf{p})$ $(\mathbf{p} \in \mathcal{G}^r)$ はしかるべく定めた正の数である.

定理 **4.1.** $\mathfrak{G}^*$ の有限次元ユニタリ表現の全体はユニタリなモジュラーテンソル圏の構造を持っており, したがって, それからユニタリな位相的場の量子論が構成される. また, この圏の融合則 (テンソル積の既約分解の規則), q-次元, S-行列は, $q = t$ での $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ の表現論より得られるモジュラーテンソル圏 $\mathbf{C}(\mathfrak{sl}(N), q)$ のそれに一致する.

注 **4.2.** (1) モジュラーテンソル圏の面代数による構成法の応用として,「$SU(2)$-型 Witten-Reshethikhin-Turaev 不変量のRSOS 模型による状態和表示」というものがある. これについては数理研講究録 997「ホップ代数と量子群」内の拙稿を参照して頂きたい.
(2) t が $\exp(\pm\pi i/(N+L))$ 以外の 1 の原始 $2(N+L)$ 乗根である場合にも面代数 $\mathfrak{G}$ を上と同様にして定義することができ, $\mathbf{mod}_{\mathfrak{G}^*}$ は(ユニタリではない) モジュラーテンソル圏になる. $\mathfrak{G}$ はほかにも若干の離散パラメータを持つが, 瑣末なことと思われるので, これについての記述は省略した.

5. 標準淡中双対性

§1 で述べた通り, $\mathbf{C}(\mathfrak{g}, q)$ と同値であると期待される圏の構成法には, 我々のもの以外にも共形場理論 (アフィンリー環) を用いるものやヘッケ環を用いるものなど様々なものが知られている. そこで, これらの同値性を実際に証明することが, 次の問題となる. この問題を念頭におきつつ, テンソル圏を統制する基本原理である淡中双対性 (の双代数版) を思い出しておこう.

モノイダル圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ に対し, 関手 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, 同型$\phi_0\colon \mathbf{1_C} \cong F(\mathbf{1_D})$ と自然同値 $(\phi_2)_{MN}\colon F(M) \otimes F(N) \cong F(M \otimes N)$ の組であって適当な条件を満たすものをモノイダル関手 と呼ぶ.

定理 5.1. (淡中双対性) $\mathbf{C}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の本質的に小さいテンソル圏とし, $\Omega : \mathbf{C} \to \mathbf{vect}_{\mathbb{K}}$ を $\mathbf{C}$ から有限次元 $\mathbb{K}$-線形空間の圏への忠実完全な $\mathbb{K}$-線形モノイダル関手とする. このとき $\mathbb{K}$ 上の双代数 $C(\Omega)$ と圏同値 $E\colon \mathbf{C} \to \mathbf{com}_{C(\Omega)}$ が定まり, $\Omega = F \circ E$ が成り立つ. ただし, $\mathbf{com}_{C(\Omega)}$ は 有限次元右 $C(\Omega)$-余加群の全体の成す圏とし, $F\colon \mathbf{com}_{C(\Omega)} \to \mathbf{vect}_{\mathbb{K}}$ は忘却関手とする.

残念ながらこの定理はこのままの形では $\mathbf{C}(\mathfrak{g}, q)$ などの圏には適用できない. と言うのは, これらの圏は一般には $\mathbf{vect}_{\mathbb{K}}$ に (テンソル積を込めては) 埋め込むことが出来ないからである. たとえば, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ で $q = \exp(\pi i/4)$ のとき, $\mathbf{C}(\mathfrak{g}, q)$ は 3 個の既約対象 $\mathbf{1}, \square, \square\square$ を持っており, それらのテンソル積の既約分解は次の規則で与えられている:

$$\square \otimes \square \cong \mathbf{1} \oplus \square\square, \quad \square \otimes \square\square \cong \square, \quad \square\square \otimes \square\square \cong \mathbf{1}. \tag{5.1}$$

したがって, もし $\mathbf{vect}_{\mathbb{K}}$ への埋め込みΩ が存在したとすれば $\dim \Omega(\mathbf{1}) = \dim \Omega(\square\square) = 1$, $\dim \Omega(\square) = \sqrt{2}$ となってしまい矛盾である.

そこで, $\mathbf{vect}_{\mathbb{K}}$ よりも複雑なテンソル圏を考え, そこへの埋め込みを考えてはどうなるかということが次に考えられる. §3 で述べた面代数の加群の圏の構造を参考にして, 有限集合 $\mathcal{V} \neq \emptyset$ に対し, 圏 $\mathbf{bimod}_{\mathbb{K}\mathcal{V}}$ を次のように定義しよう.

対象：有限次元線形空間 M であって, 直和分解

$$M = \bigoplus_{i,j \in \mathcal{V}} M(i,j) \tag{5.2}$$

を持つようなもの. (このようなものを $\mathcal{V}$-面空間 と呼ぶ.)
射： 線形写像 $f\colon M \to N$ であって, $f(M(i,j)) \subset N(i,j)$ を満たすもの.

面代数の加群の圏と同様に $\mathbf{bimod}_{\mathbb{K}\mathcal{V}}$ は(3.25) を積としてテンソル圏になる. 容易に予想出来るように, 上記の定理は次のように一般化される.

命題 **5.2.** ($\mathcal{V}$-淡中双対性) $\mathbf{C}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の本質的に小さいテンソル圏とし, $\Omega:\mathbf{C}\to\mathbf{bimod}_{\mathbb{K}\mathcal{V}}$ を忠実完全な $\mathbb{K}$-線形モノイダル関手とする．このとき $\mathbb{K}$ 上の $\mathcal{V}$-面代数 $C(\Omega)$ と圏同値 $E\colon\mathbf{C}\to\mathbf{com}_{C(\Omega)}$ が定まり, $\Omega=F\circ E$ が成り立つ．ただし, $F\colon\mathbf{com}_{C(\Omega)}\to\mathbf{bimod}_{\mathbb{K}\mathcal{V}}$ は忘却関手とする．

そこで,「テンソル圏 $\mathbf{C}$ はいつ $\mathbf{bimod}_{\mathbb{K}\mathcal{V}}$ への埋め込みを持つか？」が問題になるが,「$\mathbf{C}$ が有限分裂半単純ならよい」, というのが我々の主観察である．以下でこのことを説明してこのノートの締めくくりとする．

$\mathbf{C}$ を有限分裂半単純なテンソル圏とし, $\{L_\lambda|\lambda\in\mathcal{V}\}$ をその既約対象の完全代表系とする．$\mathbf{C}$ の各対象 X に対し, $\mathcal{V}$-面空間 $\Omega_0(X)$ を

$$\Omega_0(X)(\lambda,\mu)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L_\mu,L_\lambda\otimes X) \tag{5.3}$$

により定める．また $\mathbf{C}$ の射 $f\colon X\to Y$ に対し, $\Omega_0(f)\colon\Omega_0(X)\to\Omega_0(Y)$ を

$$\Omega_0(f)(k)=(\mathrm{id}_{L_\lambda}\otimes f)\circ k\quad(k\in\Omega_0(X)(\lambda,\mu)) \tag{5.4}$$

で定める．さらに

$$\begin{gathered}(\phi_2)_{XY}\colon\Omega_0(X)\bar{\otimes}\Omega_0(Y)\to\Omega_0(X\otimes Y);\\ f\otimes g\mapsto a_{L_\lambda XY}\circ(f\otimes\mathrm{id}_Y)\circ g\\ (f\in\Omega_0(X)(\lambda,\mu),\ g\in\Omega_0(X)(\mu,\nu),\ \lambda,\mu,\nu\in\mathcal{V}),\end{gathered}$$

$$\phi_0:R\to\Omega_0(1);\quad\lambda\mapsto r_\lambda^{-1}\quad(\lambda\in\mathcal{V})$$

とおくことにより, $\mathbf{C}$ から $\mathbf{bimod}_{\mathbb{K}\mathcal{V}}$ へのモノイダル関手が定まる．これを 標準ファイバー 関手と呼ぶ．$\mathcal{V}$-淡中双対性を標準ファイバー関手に適用することにより次が得られる．

定理 **5.3.** (標準淡中双対性) 体 $\mathbb{K}$ 上の有限分裂半単純テンソル圏 $\mathbf{C}$ に対し, 有限次元面代数 $C(\Omega_0)$ が標準的な方法で構成することができ, $\mathbf{C}$ は $\mathbf{mod}_{C(\Omega_0)^*}$ に同値になる．

References

1. V. G. Drinfeld, Quasi-Hopf algebras, *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 1419-1457.
2. T. Hayashi, An algebra related to the fusion rules of Wess-Zumino-Witten models, *Lett. Math Phys.* **22** (1991), 291-296.
3. T. Hayashi, Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its application to Jones' index theory, *Commun. Math. Phys.* **157** (1993), 331-345.
4. T. Hayashi, Face algebras and their Drinfeld doubles, *in* "Proceedings of Symposia in Pure Mathematics," Vol 56, Part 2, American Mathematical Society, 1994.
5. T. Hayashi, Face algebras I — A generalization of quantum group theory, to appear in *J. Math. Soc. Japan.*
6. T. Hayashi, Compact quantum groups of face type, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **32** (1996), 351 - 369.
7. T. Hayashi, Galois quantum groups of II_1-subfactors, preprint.
8. T. Hayashi, Face algebras II — Standard generator theorems, in preparation.
9. T. Hayashi, Face algebras and unitarity of $SU(N)_L$-TQFT, to appear in Commun. Math. Phys.
10. C. Kassel, "Quantum groups," Springer-Verlag, New York, 1995.
11. N. Reshetikhin and V. Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* **103** (1991), 547-598.
12. N. Reshetikhin, L. Takhtadzhyan and L. Faddeev, Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 193-225.
13. M. Sweedler, "Hopf algebras," Benjamin Inc., New York, 1969.
14. V. Turaev, "Quantum invariants of knots and 3-manifolds," Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994.
15. E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 351-399.